

Modelamiento matemático de la población ecuatoriana mediante ecuaciones diferenciales con retardo y su validación con datos del Censo 2022

Mathematical modeling of the Ecuadorian population using delay differential equations and its validation with 2022 Census data

Jefferson Agustín Macías Bravo. Lic. ¹

Ambrosio Tineo Moya. PhD. ²

Maribel Pérez Pirela. PhD. ³

¹Universidad Técnica de Manabí, Facultad de Ciencias Básicas, Portoviejo – Ecuador, Correo: jmacias5287@utm.edu.ec, Código Orcid: <https://orcid.org/0009-0003-5616-408X>

²Universidad Técnica de Manabí, Facultad de Ciencias Básicas, Portoviejo – Ecuador, Correo: ambrosio.tineo@utm.edu.ec, Código Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-2060-8860>

³Universidad Técnica de Manabí, Facultad de Ciencias Básicas, Portoviejo – Ecuador, Correo: maribel.perez@utm.edu.ec, Código Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-9687-5471>

Contacto: jmacias5287@utm.edu.ec

Recibido: 25 de abril de 2025

Aprobado: 29 de octubre de 2025

Resumen

El estudio presenta la aplicación y evaluación de un modelo matemático de crecimiento poblacional con retardo temporal para describir la dinámica de la población ecuatoriana entre 2001 y 2022. Se utilizó un modelo de ecuación diferencial con retardo (EDR) basado en la formulación $dP(t)/dt = r P(t - \tau)$, donde r es la tasa intrínseca de crecimiento y τ es el retardo. La tasa r se estimó a partir de los datos censales obtenidos del Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INEC) de 2001 y 2010 ($r \approx 0,0224 \text{ año}^{-1}$). El modelo se resolvió numéricamente mediante un método de diferencias finitas implementado en Python (Google Colab) para el periodo 2001-2022. La población simulada para 2010 mostró un error relativo del 1,54% respecto al censo. Sin embargo, la proyección para 2022 con 18.658.915 habitantes presentó un error relativo del 10,15% frente al dato real del Censo 2022 con 16.938.986 habitantes, indicando una sobreestimación. Este resultado se discute en el contexto de la nueva realidad demográfica ecuatoriana, caracterizada por un crecimiento poblacional desacelerado y envejecimiento, revelada por el INEC. Se concluye que, aunque el modelo captura la tendencia histórica, su capacidad predictiva a largo plazo es limitada sin actualizar los parámetros o incorporar dinámicas demográficas cambiantes.

Palabras clave: Población; Ecuaciones Diferenciales con Retardo; Modelamiento Matemático; Censo Ecuador 2022; Transición Demográfica; Google Colab; Python.

Abstract

This study presents the application and evaluation of a time-delay population growth mathematical model to describe the dynamics of Ecuador's population between 2001 and 2022. A delay differential equation (DDE) model based on the formulation $dP(t)/dt = r P(t - \tau)$ was used, where r is the intrinsic growth rate and τ is the delay. The rate r was estimated from the 2001 and 2010 census data ($r \approx 0.0224 \text{ year}^{-1}$). The model was numerically solved using a finite difference method implemented in Python (Google Colab) for the period 2001-2022. The simulated population for 2010 showed a relative error of 1.54% compared to the census data.

<https://www.itsup.edu.ec/sinapsis>



However, the projection for 2022 with 18 658 915 inhabitants presented a relative error of 10.15% against the real 2022 Census data with 16 938 986 inhabitants, indicating an overestimation. This result is discussed in the context of Ecuador's new demographic reality, characterized by slowed population growth and aging, as revealed by the INEC. It is concluded that while the model captures the historical trend, its long-term predictive capability is limited without updating parameters or incorporating changing demographic dynamics.

Keywords: *Population; Delay Differential Equations; Mathematical Modeling; Ecuador Census 2022; Demographic Transition; Google Colab; Python.*

Introducción

La dinámica poblacional constituye un pilar fundamental para la formulación de políticas públicas, la planificación económica y el diseño de sistemas de salud y seguridad social en cualquier país. En el caso de Ecuador, comprender las tendencias y proyectar el crecimiento poblacional es esencial para abordar los desafíos emergentes asociados con cambios estructurales en su composición demográfica. El Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INEC) ha destacado, en el marco del Día Mundial de la Población, los desafíos y oportunidades que representa para Ecuador el fenómeno del envejecimiento poblacional, señalando que los resultados del Censo Ecuador revelarán una nueva realidad poblacional con un ritmo de crecimiento menor (INEC, 2024). Esta nueva realidad demográfica destaca la importancia de contar con herramientas analíticas precisas y actualizadas para entender y predecir la evolución futura de la población.

Históricamente, los modelos matemáticos han demostrado ser instrumentos valiosos para el análisis y la proyección de fenómenos demográficos complejos (Preston, Heuveline, & Guillot, 2000). Entre ellos, los modelos basados en ecuaciones diferenciales han sido ampliamente empleados para describir el crecimiento y la dinámica de poblaciones humanas. Estos modelos permiten formular hipótesis sobre las fuerzas que impulsan el cambio poblacional como la natalidad, la mortalidad y la migración, así como evaluar sus interacciones a lo largo del tiempo (Brauer & Castillo Chavez, 2012). La elección del modelo adecuado depende, en gran medida, de la naturaleza de los datos disponibles y de los objetivos específicos del análisis.

Una extensión importante de los modelos clásicos son las ecuaciones diferenciales con retardo (EDR, por sus siglas en inglés), las cuales incorporan explícitamente un lapso temporal entre la causa y el efecto en los procesos demográficos. Por ejemplo, el impacto de una cohorte natal en la tasa de natalidad futura no es inmediato, sino que se manifiesta después de un período de maduración (Gopalsamy, 1992). Esta característica hace que los modelos con retardo sean particularmente adecuados para capturar ciertas dinámicas intrínsecas de las poblaciones humanas, donde los efectos generacionales juegan un papel crucial. La inclusión de este componente temporal puede mejorar significativamente la representatividad del modelo respecto a la realidad observada (Bacaër, 2011).

La implementación de estos modelos requiere no solo de una formulación matemática sólida sino también de métodos numéricos eficientes para su resolución. El avance en las herramientas computacionales ha facilitado extraordinariamente este proceso. Entornos como Google Colab, basado en la nube y que utiliza el lenguaje Python, permiten el desarrollo ágil de algoritmos científicos, garantizando reproducibilidad y acceso a recursos computacionales (Perez & Granger, 2007). Python, con librerías especializadas como NumPy y SciPy, se ha consolidado como una plataforma estándar para cálculos científicos y simulaciones numéricas (Millman & Perez, 2014)). Esta combinación de modelos matemáticos avanzados y herramientas computacionales modernas ofrece una metodología poderosa para el análisis demográfico contemporáneo.

Dado el contexto de transición demográfica señalado por el INEC y la necesidad de evaluar la precisión de las proyecciones poblacionales basadas en datos históricos, surge la pertinencia de aplicar y validar modelos matemáticos frente a la realidad. Evaluar cómo un modelo calibrado con datos de censos anteriores del 2001 y 2010 que se comporta al predecir la población en 2022, con el nuevo censo como referencia, permite discernir sobre la robustez y las limitaciones de dichos modelos. Este estudio tiene como finalidad aplicar un modelo de crecimiento poblacional con retardo temporal para describir la evolución de la población ecuatoriana entre 2001 y 2022. Se estima la tasa intrínseca de crecimiento a partir de los censos de 2001 y 2010, se implementa numéricamente el modelo utilizando Python en Google Colab y se compara la proyección para

<https://www.itsup.edu.ec/sinapsis>



2022 con el dato real del Censo 2022. El análisis busca contribuir al conocimiento sobre la utilidad de los modelos EDR en el contexto ecuatoriano y reflexionar sobre su capacidad para anticipar los cambios demográficos en un escenario de transición.

Materiales y métodos

Para modelar el crecimiento poblacional de Ecuador y evaluar su proyección, se utilizaron datos oficiales del INEC (2013). La población ecuatoriana para el año 2001 fue de aproximadamente 12.156.608 habitantes y, en el año 2010, de 14.884.000 habitantes. Estos dos puntos temporales se utilizaron para estimar la tasa de crecimiento intrínseca r , la cual se aplicó para proyectar la población hasta el año 2022. El censo del año 2022 registró una población total de 16.938.986 habitantes (INEC, 2023), lo cual permite contrastar la predicción del modelo con un valor real reciente.

Modelo matemático y simulación (Métodos)

Con el fin de describir de forma más precisa la dinámica poblacional, se implementó un modelo de crecimiento con retardo temporal, considerando que los efectos de la natalidad y mortalidad no se reflejan de manera inmediata en la población total, sino que presentan un desfase generacional. Este enfoque es, especialmente útil, en poblaciones humanas donde los cambios demográficos responden a dinámicas sociales y biológicas que operan con cierto retraso.

Se considera el siguiente modelo con retardo:

$$\frac{dP(t)}{dt} = r \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t - \tau)}{K}\right)$$

donde:

$P(t)$: población en el año t ,

r : tasa intrínseca de crecimiento poblacional,

K : capacidad de carga del entorno,

τ : retardo temporal (en este caso, $\tau = 5$ años).

Dado que durante ese periodo no se observa una saturación poblacional crítica, se asume $K \rightarrow \infty$, simplificando la ecuación a:

$$\frac{dP(t)}{dt} = r \cdot P(t - \tau)$$

Este tipo de ecuación diferencial con retardo (EDR, por sus siglas en inglés) pertenece a la clase de ecuaciones funcionales de tipo retardada, ampliamente utilizadas en biología matemática y dinámica de poblaciones (Smith, 2011). La tasa de crecimiento r se estimó, a partir de los datos poblacionales, mediante la fórmula:

$$P(2010) = P(2001) \cdot e^{r \cdot (2010 - 2001)}$$

Despejando r :

$$r = \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \ln\left(\frac{14.884.000}{12.156.608}\right) \approx 0,0224 \text{ año}^{-1}$$

Por lo tanto, el modelo final adoptado fue:

$$\frac{dP(t)}{dt} = 0,0224 \cdot P(t - 5)$$

Con condición inicial:

$$P_0 = 12.156.608 \text{ para } t \in [-5, 0]$$

El modelo con retardo calibrado se resolvió numéricamente para el periodo 2001-2022 con el fin de proyectar la población y compararla con el dato real del censo de 2022. Para realizarla, se aplicó el método numérico de diferencias finitas en un intervalo ampliado de tiempo. El periodo de simulación se extendió desde $t = 0$ (correspondiente al año 2001) hasta $t = 21$ (correspondiente al año 2022), abarcando un horizonte de 21 años.

Para manejar el retardo de 5 años ($\tau = 5$) en las condiciones iniciales negativas ($t \in [-5, 0]$), se asumió que la población había permanecido constante e igual al valor del censo de 2001 (12.156.608 habitantes) durante los cinco años previos (1996-2001). Esta suposición proporciona una base histórica simple para iniciar la simulación con el modelo de retardo.

Siendo el valor estimado de $r = 0,0224 \text{ año}^{-1}$ y un paso de integración de $h = 1 \text{ año}$, se calcularon iterativamente los valores de población para cada año subsiguiente, desde 2001 hasta 2022. El resultado de esta simulación numérica proporciona una trayectoria proyectada de la

población ecuatoriana basada en la dinámica del modelo con retardo y la tasa de crecimiento calibrada en dicho periodo.

La implementación del modelo se realizó utilizando el entorno de computación en la nube Google Colab con el lenguaje de programación Python 3. El código fuente se desarrolló aprovechando la estructura eficiente de arreglos multidimensionales proporcionada por la librería NumPy y las capacidades de visualización gráfica de Matplotlib. Se empleó un esquema de diferencias finitas de primer orden, específicamente el método de Euler adaptado para EDR, siguiendo enfoques descritos en la literatura especializada. Este método aproxima la derivada mediante una fórmula hacia adelante y gestiona el retardo accediendo a valores pasados almacenados en un vector, lo cual es computacionalmente eficiente para este tipo de problemas (Shampine & Thompson, 2001).

La ecuación diferencial con retardo se resuelve numéricamente para obtener el comportamiento de la cantidad poblacional a lo largo del tiempo. Finalizada la simulación, el código extrae automáticamente el valor proyectado para el año 2022 y lo compara con el dato real del censo de 16.938.986 habitantes. Además, se genera una representación gráfica que muestra la trayectoria completa de la población simulada junto con los puntos de datos censales reales de 2001, 2010 y 2022, facilitando la visualización de la precisión de la predicción del modelo. El algoritmo implementa el método de diferencias finitas, que se presenta a continuación:

```
# Simulación de una DDE:  $dP/dt = r$ 
#  $P(t - \tau)$ , con historial constante
# Estimación de 'r' usando datos de
# 2001 y 2010
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos del censo
P_2001 = 12_156_608 #
Población en 2001
P_2010 = 14_884_000 #
Población en 2010
dato_real_2022 = 16_938_986 #
Población real en 2022 (dato a
comparar)

# Estimar tasa de crecimiento 'r'
# usando datos 2001-2010
# Asumimos un crecimiento
# exponencial  $P(t) = P(2001) * \exp(r * (t - 2001))$ 
años_entre_censos = 2010 - 2001 #
# 9 años
r = np.log(P_2010 / P_2001) /
años_entre_censos
print(f'Tasa de crecimiento 'r'
estimada (2001-2010): {r:.6f}
año-1')

# Parámetros del modelo DDE
tau = 5 # Retardo en años
h = 1 # Paso de integración
(1 año)
```

```
# Intervalo de simulación (de 2001 a
# 2022 para ver la proyección
# completa)
t0 = 2001
tf = 2022
años_total = tf - t0 # 21 años
pasos_total = años_total + 1 # 22
# pasos
retardo_pasos = int(tau / h) # 5 pasos

# Vector de tiempo desde t0-tau
# hasta tf
# t = [1996, 1997, ..., 2001, ..., 2022]
# índices: [0, 1, ..., 5, ..., 26]
t = np.arange(t0 - tau, tf + 1) # De
# 1996 a 2022 (27 años)
P = np.zeros(len(t))

# Definir historial: constante en [t0-
# tau, t0] = [1996, 2001]
# Es decir, asumimos
# P=12_156_608 desde 1996 hasta
# 2001
P[:retardo_pasos + 1] = P_2001

# Método numérico basado en
# diferencias finitas con retardo
# El bucle comienza en el índice
# correspondiente a t=2001 (índice 5)
# y calcula hasta t=2022 (índice 26)
for n in range(retardo_pasos, len(t) -
1): # n de 5 a 25
#  $P[n+1] = P[n] + h * r * P[n -$ 
#  $retardo\_pasos]$ 
# Donde n es el índice actual, n+1
# el siguiente
```



```
# n-retardo_pasos es el índice del
valor retardado
```

```
P[n + 1] = P[n] + h * r * P[n -
retardo_pasos]
```

```
# Crear tabla con años reales (de
2001 a 2022)
```

```
años = np.arange(t0, tf + 1) # 2001 a
2022
```

```
# Los valores simulados comienzan
en el índice 'retardo_pasos' (5) de P
población =
P[retardo_pasos:].astype(int) # De
2001 a 2022
```

```
tabla = pd.DataFrame({'Año': años,
'Población simulada': población})
```

```
# Mostrar tabla completa
print("\nTabla de población
simulada (Ecuador 2001–2022):")
display(tabla)
```

```
# Comparación con datos censales
reales
```

```
print("\nComparación con datos
censales reales:")
```

```
print(f'Dato real 2001:
{P_2001:,}')
```

```
simulado_2001 = población[0] #
CORREGIDO: usar población (con
tilde)
```

```
print(f'Simulación 2001:
{simulado_2001:,}')
```

```
print(f'\nDato real 2010:
{P_2010:,}')
```

```
# Encontrar el valor simulado para
2010
```

```
idx_2010 = np.where(años ==
2010)[0][0]
```

```
simulado_2010 =
población[idx_2010] #
```

```
CORREGIDO: usar población (con
tilde)
```

```
print(f'Simulación 2010:
{simulado_2010:,}')
```

```
error_2010 = abs(simulado_2010 -
P_2010) / P_2010 * 100
```

```
print(f'Error relativo 2010:
{error_2010:.2f}%')
```

```
print(f'\nDato real 2022:
{dato_real_2022:,}')
```

```
# El último valor de la población
simulada es para 2022
```

```
simulado_2022 = población[-1] #
CORREGIDO: usar población (con
tilde)
```

```
print(f'Simulación 2022:
{simulado_2022:,}')
```

```
error_relativo_2022 =
abs(simulado_2022 -
dato_real_2022) / dato_real_2022 *
100
```

```
print(f'Error relativo 2022:
{error_relativo_2022:.2f}%')
```

```
# Gráfica de evolución poblacional
plt.figure(figsize=(12, 7))
plt.plot(años, población, marker='o',
label='Población simulada (DDE)',
linewidth=2)
```

```
# Puntos de datos reales
plt.plot([2001, 2010, 2022],
[P_2001, P_2010, dato_real_2022],
'ro', markersize=8,
label='Datos censales reales')
```

```
# Líneas punteadas para conectar los
puntos reales
```

```
plt.plot([2001, 2010, 2022],
[P_2001, P_2010, dato_real_2022],
'r--', alpha=0.5)
```

```
plt.title("Modelo de crecimiento
poblacional con retardo (Ecuador
2001–2022)\n"
```

```
f'r={r:.4f} año-1, τ={tau}
años", fontsize=14)
```

```
plt.xlabel("Año", fontsize=12)
```

```
plt.ylabel("Población", fontsize=12)
```

```
plt.grid(True, alpha=0.3)
```

```
plt.legend()
```

```
# Formato del eje y en millones
```

```
plt.gca().yaxis.set_major_formatter(
plt.FuncFormatter(lambda x, p:
f'{x/1_000_000:.1f}M'))
```

```
plt.tight_layout()
```

```
plt.show()
```

Resultados

La simulación del modelo de crecimiento poblacional con retardo temporal, calibrado con los datos censales de 2001 y 2010, ofrece una proyección de la dinámica poblacional de Ecuador hasta 2022. Los resultados indican que el modelo, basado en una tasa de crecimiento intrínseca estimada de 2.24% anual y un retardo de 5 años, predice un crecimiento continuo y acelerado de la población. Según la simulación, la población pasaría de 12.156.608 habitantes en 2001 a un estimado de 18.658.915 para 2022 como se observa en la Tabla 1. Esta trayectoria refleja la capacidad del modelo para capturar la tendencia general de aumento poblacional durante el periodo analizado.

| Index | Año | Población simulada |
|-------|------|--------------------|
| 0 | 2001 | 12156608 |
| 1 | 2002 | 12430015 |
| 2 | 2003 | 12703422 |
| 3 | 2004 | 12976830 |
| 4 | 2005 | 13250237 |
| 5 | 2006 | 13523645 |
| 6 | 2007 | 13797052 |
| 7 | 2008 | 14076608 |
| 8 | 2009 | 14362314 |
| 9 | 2010 | 14654168 |
| 10 | 2011 | 14952172 |
| 11 | 2012 | 15256325 |
| 12 | 2013 | 15566626 |
| 13 | 2014 | 15883216 |
| 14 | 2015 | 16206230 |
| 15 | 2016 | 16535809 |
| 16 | 2017 | 16872090 |
| 17 | 2018 | 17215211 |
| 18 | 2019 | 17565311 |
| 19 | 2020 | 17922532 |
| 20 | 2021 | 18287017 |
| 21 | 2022 | 18658915 |

Tabla 2 Valores poblacionales proyectados mediante el modelo de ecuación diferencial con retardo (años 2001-2022)

Sin embargo, al comparar estos resultados con los datos censales oficiales, se observan discrepancias que son clave para evaluar la precisión del modelo (Figura 1). Para el año 2010, final del periodo de calibración, el modelo presenta un error relativo relativamente bajo de 1.54%, subestimando la población en aproximadamente 229.832 habitantes (14.884.000 real vs. 14.654.168 simulado). Esto sugiere que, dentro del periodo de ajuste, el modelo exponencial con retardo representa adecuadamente la tendencia de crecimiento, aunque no es perfecto.

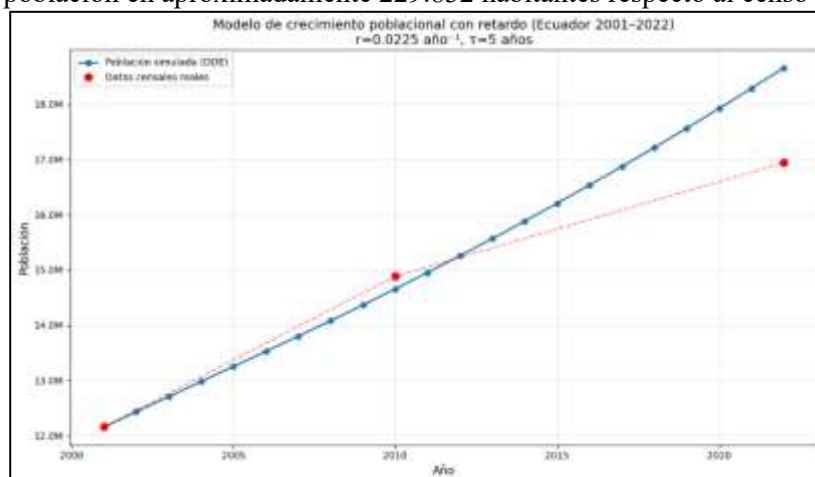
El análisis más crítico se encuentra en la proyección para 2022 debido a que el modelo arroja un error relativo de 10.15%, Esta sobreestimación significativa indica una limitación importante del modelo cuando se extrapola más allá del periodo de datos utilizados para su calibración. La diferencia absoluta de 1.719.929 habitantes sugiere que factores no incorporados en el modelo, tales como

| | |
|----------------------|------------|
| Dato real 2001: | 12,156,608 |
| Simulación 2001: | 12,156,608 |
| Dato real 2010: | 14,884,000 |
| Simulación 2010: | 14,654,168 |
| Error relativo 2010: | 1.54% |
| Dato real 2022: | 16,938,986 |
| Simulación 2022: | 18,658,915 |
| Error relativo 2022: | 10.15% |

Figura 2 Comparación con datos censales reales

posibles disminuciones en las tasas de natalidad, cambios en las políticas migratorias o, incluso, eventos coyunturales no previstos, pueden haber influido en la dinámica poblacional real entre 2010 y 2022. Por consiguiente, aunque el modelo con retardo es útil para describir la dinámica pasada y cercana, su capacidad predictiva a largo plazo puede verse comprometida por la complejidad de los fenómenos demográficos reales.

La Gráfica 1 ilustra la evolución de la población ecuatoriana simulada mediante el modelo de ecuación diferencial con retardo (EDR) en comparación con los datos censales reales para el periodo 2001–2022. Se observa que el modelo reproduce exactamente el dato inicial de 2001, utilizado para su calibración, evidenciando una trayectoria de crecimiento que refleja la dinámica poblacional con un retardo de cinco años. Durante el periodo de calibración, la curva simulada sigue una tendencia ascendente acorde con los datos reales, presentando una desviación relativamente baja al final de este periodo, con un error de 1.54% en el año 2010, donde el modelo subestima la población en aproximadamente 229.832 habitantes respecto al censo oficial.



Gráfica 2 Modelo de crecimiento poblacional con retardo (Ecuador 2001–2022)

Al extrapolar el modelo posterior a 2010, se evidencia una divergencia progresiva entre la población proyectada y la real, lo que sugiere que el modelo, basado en una tasa de crecimiento constante derivada del período 2001–2010, no captura adecuadamente los posibles cambios en las dinámicas demográficas reales ocurridas entre 2010 y 2022, como podrían ser variaciones en las tasas de natalidad, mortalidad o migración. Por lo tanto, aunque el modelo con retardo es eficaz para describir la tendencia histórica dentro del rango de datos utilizados para su ajuste, su capacidad predictiva a largo plazo es limitada, subrayando la necesidad de incorporar factores adicionales o actualizar la tasa de crecimiento con información más reciente para mejorar la precisión de las proyecciones futuras.

La incorporación específica de un retardo temporal en el modelo, como el realizado en esta investigación, busca capturar fenómenos demográficos como el efecto de las cohortes jóvenes en la natalidad futura o los rezagos en la respuesta de la mortalidad a cambios en condiciones de vida. Este enfoque encuentra paralelismos en estudios de dinámica poblacional en biología matemática y en algunos modelos económicos demográficos (Murray, 2002). La comparación directa con estudios previos específicos sobre modelamiento poblacional ecuatoriano que utilicen

EDR es limitada, lo que sugiere que este trabajo aporta una perspectiva adicional al análisis demográfico del país mediante una metodología menos convencional en este contexto.

Discusión

La aplicación de modelos matemáticos y, en particular, de ecuaciones diferenciales con retardo (EDR) para la proyección de la población, ha sido una práctica común en estudios demográficos y de planificación (Keyfitz, 1977). Estudios clásicos como el de Lotka (1939), que sentó las bases matemáticas para la dinámica de poblaciones, y trabajos posteriores de autores como Leslie (1945) con matrices de población, han demostrado la utilidad de herramientas matemáticas para entender y predecir cambios poblacionales.

La discusión de los resultados obtenidos en este estudio se enmarca en el contexto de las dinámicas demográficas cambiantes en Ecuador, encontrándose un error relativo de 10.15%. Esta sobreestimación indica una limitación del modelo cuando se extrapola más allá del periodo de datos utilizado para su calibración. El supuesto fundamental de una tasa de crecimiento intrínseca constante, derivada del periodo estimado, no parece capturar adecuadamente los cambios en las tendencias demográficas ocurridos en la década siguiente. Este hallazgo se alinea con principios reconocidos en la literatura demográfica que señalan los desafíos de la proyección a largo plazo basada en tendencias pasadas (Lee & Tuljapurkar, 1994). Factores como la disminución de las tasas de fecundidad, cambios en las tasas de mortalidad y dinámicas migratorias, no incorporados en este modelo simple, tienen un impacto determinante en la trayectoria real de la población (Keyfitz, 1977). La magnitud del error sugiere que el crecimiento poblacional efectivo en Ecuador entre 2010 y 2022 fue menor al proyectado, lo cual está en consonancia con tendencias demográficas globales y regionales hacia una desaceleración del crecimiento.

Los resultados del Censo Ecuador 2022 revelan una nueva realidad poblacional caracterizada por un crecimiento a un ritmo menor, un fenómeno asociado directamente con el proceso de transición demográfica (INEC, 2023). Este escenario implica desafíos y oportunidades para el país, particularmente en relación con el envejecimiento poblacional. El hecho de que este modelo, basado en un periodo de crecimiento más acelerado, no logre predecir con precisión la población en un periodo posterior, refleja la necesidad de incorporar estos cambios estructurales en los modelos de proyección. La simplificación del modelo al asumir $K \rightarrow \infty$ y una tasa r constante, aunque útil para describir dinámicas pasadas, resulta insuficiente para anticipar las consecuencias de una transición demográfica en curso. Por ello, serán necesarios modelos más sofisticados que integren variaciones temporales en los parámetros demográficos a fin de mejorar la precisión de las predicciones futuras.

Conclusiones

La implementación y evaluación del modelo de ecuación diferencial con retardo (EDR) para la dinámica poblacional de Ecuador demostró ser una herramienta matemáticamente coherente para representar la evolución poblacional durante el periodo de calibración 2001-2010, reflejado en un error relativo bajo de 1.54% para el año 2010. Sin embargo, su capacidad predictiva a largo plazo se mostró limitada. La proyección para 2022, basada en una tasa de crecimiento estimada de 2.24% anual derivada del periodo 2001-2010, resultó en una sobreestimación significativa con 10.15% de error relativo respecto al dato real del Censo 2022. Esta discrepancia indica que el modelo, al asumir un crecimiento basado en parámetros constantes y no considerar factores cambiantes como posibles disminuciones en las tasas de natalidad o cambios en la migración, no captura adecuadamente la nueva realidad demográfica ecuatoriana (o la realidad demográfica ecuatoriana actual), caracterizada por un crecimiento poblacional desacelerado.

Por lo tanto, se concluye que los modelos EDR simples, aunque útiles para describir tendencias pasadas y realizar proyecciones a corto plazo cuando se ajustan adecuadamente, presentan deficiencias importantes para predicciones precisas a largo plazo en contextos donde la dinámica demográfica experimenta cambios estructurales. Este hallazgo enfatiza la importancia de actualizar periódicamente los parámetros de los modelos poblacionales e incorporar indicadores demográficos más dinámicos y variables para mejorar la precisión de las proyecciones futuras, ajustándolas mejor con los desafíos actuales como el envejecimiento poblacional, identificado por el INEC (año). La utilización de plataformas accesibles como Google Colab y Python facilita la

implementación y prueba de modelos más sofisticados, abriendo oportunidades para investigaciones futuras que integren múltiples factores demográficos y ofrezcan proyecciones más confiables la planificación nacional.

Bibliografía

1. Bacaër, N. (2011). *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. London: Springer. doi:<https://doi.org/10.1007/978-0-85729-115-8>
2. Brauer, F., & Castillo Chavez, C. (2012). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. New York: Springer. doi:https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1686-9?spm=a2ty_o01.29997173.0.0.3beec9215Xg3qL
3. Gopalsamy, K. (1992). *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Springer Science & Business Media. Obtenido de https://books.google.com.ec/books/about/Stability_and_Oscillations_in_Delay_Diff.html?id=BXbK_T_PSDwC&redir_esc=y
4. Instituto Nacional de Estadística y Censos. (2013). *Censos de población y vivienda*. Obtenido de <https://www.ecuadorencifras.gob.ec/documentos/inec37/censos.html>
5. Instituto Nacional de Estadística y Censos. (2023). *Ecuador creció en 2.5 millones de personas entre 2010 y 2022*. Obtenido de <https://www.censoecuador.gob.ec/ecuador-crecio-en-2-5-millones-de-personas-entre-2010-y-2022/>
6. Instituto Nacional de Estadísticas y Censos . (11 de julio de 2024). *Desafíos y oportunidades para el Ecuador ante el envejecimiento poblacional: INEC destaca datos claves en el Día Mundial de la Población*. Obtenido de Censo Ecuado: <https://www.censoecuador.gob.ec/>
7. Keyfitz, N. (1977). *Applied Mathematical Demography*. New York: Springer. doi:<https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1879-9>
8. Lee, R. D., & Tuljapurkar, S. (1994). Stochastic Population Forecasts for the United States: Beyond High, Medium, and Low. *Journal of the American Statistical Association*, 89(428), 1175–1189. doi:<https://doi.org/10.2307/2290980>
9. Lotka, A. J. (1939). *Théorie analytique des associations biologiques* (Vol. II). Hermann et cie. Recuperado el 15 de junio de 2025, de <https://books.google.com.ec/books?id=iTetsdX3Le4C>
10. Millman, K., & Perez, F. (2014). Developing Open-Source Scientific Practice. *Implementing Reproducible Research*, 149-183. doi:<http://dx.doi.org/10.1201/9781315373461-6>
11. Murray , J. D. (2002). *Mathematical Biology*. New York: Springer. doi:<https://doi.org/10.1007/b98868>
12. Perez, F., & Granger, B. E. (2007). IPython: A System for Interactive Scientific Computing. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 21 - 29. doi:<https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.53>
13. Preston, S., Heuveline, P., & Guillot, M. (2000). *Demography: Measuring and Modeling Population Processes*. Wiley. Obtenido de https://books.google.com.ec/books/about/Demography.html?id=xlV2H6LpNAwC&redir_esc=y
14. Shampine, L. F., & Thompson, S. (2001). Solving DDEs in Matlab. *Applied Numerical Mathematics*, 37(4), 441-458. doi:[https://doi.org/10.1016/S0168-9274\(00\)00055-6](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(00)00055-6)
15. Smith, H. L. (2011). *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. New York: Springer. doi:10.1007/978-1-4419-7646-8