

Aplicación de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden para optimizar la mezcla de bebidas gaseosas en la industria.

An Application of First Order Linear Differential Equations in Stable Consistent Mixture with a Focus on the Soft Drink Industry

Jefferson Agustín Macias Bravo¹

Maribel Pérez Pirela. PhD²

Ambrosio Tineo Moya. PhD³

¹Estudiante de la Universidad Técnica de Manabí, Facultad de Ciencias Básicas, Portoviejo – Ecuador, Correo: jmacias5287@utm.edu.ec, Código Orcid: <https://orcid.org/0009-0003-5616-408X>

²Docente de la Universidad Técnica de Manabí, Facultad de Ciencias Básicas, Portoviejo – Ecuador, Correo: maribel.perez@utm.edu.ec, Código Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-9687-5471>

³Docente de la Universidad Técnica de Manabí, Facultad de Ciencias Básicas, Portoviejo – Ecuador, Correo: ambrosio.tineo@utm.edu.ec, Código Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-2060-8860>

Contacto: jmacias5287@utm.edu.ec

Recibido: 26-01-2025

Aprobado: 20-04-2025

Resumen

Este estudio aborda la aplicación de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden para modelar el proceso de mezcla en la producción de bebidas gaseosas. A través del análisis matemático, se examina cómo la variación de los flujos de entrada y salida afecta la concentración de ingredientes en el tiempo. Los resultados obtenidos permiten comprender de manera más detallada las dinámicas del proceso de mezcla, destacando su utilidad en el control de calidad de la producción. Aunque el modelo es matemáticamente adecuado, se reconoce la importancia de ajustarlo con datos experimentales para mejorar su precisión y reducir errores en la simulación. Este enfoque proporciona una base sólida para una mejor comprensión del comportamiento de los ingredientes durante el proceso de producción.

Palabras clave: procesos de mezcla, ecuaciones diferenciales, bebidas gaseosas, simulación matemática

Abstract

This paper explores the application of first-order linear differential equations to model the mixing process in carbonated beverage production. Through mathematical analysis, the study examines how variations in input and output flows affect the concentration of ingredients over time. The results offer a clearer understanding of the dynamics involved, proving useful for quality control during production. While the model demonstrates mathematical accuracy, the importance of adjusting it with experimental data is recognized to enhance precision and reduce simulation errors. This approach provides a solid foundation for better understanding ingredient behavior in the production process.

Keywords: mixing processes, differential equations, soft drinks, mathematical simulation

<https://www.itsup.edu.ec/sinapsis>



Introducción

La industria agroalimentaria y, en particular, la producción de bebidas gaseosas enfrenta desafíos significativos en la optimización de procesos de mezcla para garantizar la homogeneidad y calidad del producto final (Oltra, Hargaden, Coughlan y García. 2020). En este contexto, las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se presentan como una herramienta poderosa para modelar y analizar estos procesos (Zill y Wright, 2017). La aplicación de estos modelos matemáticos permite una mejor comprensión de las dinámicas de mezcla, facilitando la identificación de parámetros críticos y la predicción del comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones operativas.

La producción de bebidas gaseosas requiere una mezcla precisa y consistente de diversos ingredientes para asegurar que cada lote mantenga los estándares de calidad y sabor establecidos. La implementación de modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales lineales de primer orden puede mejorar significativamente el control y la optimización de estos procesos (Moore, 2017).

Se utilizó MATLAB Online (basic) porque es una opción gratuita que proporciona las herramientas esenciales para modelar y simular ecuaciones diferenciales, sin necesidad de instalación local, lo que facilita su acceso desde cualquier dispositivo con conexión a internet (MathWorks, 2024). Además, las 20 horas de uso mensual y los 5 GB de almacenamiento que ofrece son suficientes para llevar a cabo las simulaciones necesarias. A través de la simulación y análisis matemático, es posible identificar oportunidades para mejorar la eficiencia del proceso, reducir costos y minimizar variaciones en la calidad del producto final (Granato y De Araújo Calado, 2010). Este enfoque no solo aporta beneficios económicos y operativos, sino que también contribuye al desarrollo de una industria más sostenible y competitiva.

El objetivo general de esta investigación fue aplicar modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales lineales de primer orden para el análisis y la optimización de procesos de mezcla consistente estable en la industria agro alimentaria, con énfasis en la industria de bebidas gaseosas. Para alcanzar este objetivo, se identificaron los procesos clave de mezcla en la industria agroalimentaria, especialmente en la producción de bebidas gaseosas donde, la homogeneidad y la calidad del producto final son críticos. Además, se formulan modelos de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden que modelen el comportamiento de las mezclas, considerando factores como tasas de entrada y salida de componentes y posibles reacciones químicas. Posteriormente, se simuló los modelos matemáticos desarrollados, utilizando MATLAB Online (basic), para prever el comportamiento de las mezclas bajo diferentes condiciones operativas, validando los resultados mediante datos experimentales y ajustando los modelos para mejorar su precisión y aplicabilidad (Yang, 2024).

Materiales y métodos

Modelado Matemático de Procesos de Mezcla

El modelado de los procesos de mezcla en la industria de bebidas gaseosas se fundamenta en la utilización de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. La ecuación diferencial básica puede formularse como:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \dot{m}_{entrada} - \dot{m}_{salida} \quad (1)$$

Donde:

$$\dot{m}_{entrada} = \rho_{entrada} \times Q_{entrada}$$

$$\dot{m}_{salida} = \rho_{salida} \times Q_{salida}$$

y la densidad de salida se define como:

$$\rho_{salida} = \frac{A(t)}{V_0 + (Q_{entrada} - Q_{salida})t} \quad (2)$$

siendo $A(t)$ la cantidad del componente en el tiempo t , $\rho_{entrada}$ y ρ_{salida} las densidades de entrada y salida, $Q_{entrada}$ y Q_{salida} los flujos volumétricos de entrada y salida, y V_0 el volumen inicial (Smith, 2011).

Simulación y Optimización

Para evaluar el modelo, se consideran los siguientes parámetros iniciales:

$$\rho_{entrada} = 1,0 \text{ kg/m}^3$$

$$Q_{entrada} = 2,0 \text{ m}^3/\text{min}$$

$$Q_{salida} = 1,5 \text{ m}^3/\text{min}$$

$$\text{Volumen inicial } V_0 = 100 \text{ m}^3$$

$$\text{Cantidad inicial } A(0) = 0 \text{ kg}$$

Usando MATLAB Online (Basic), la ecuación diferencial se resuelve numéricamente para obtener el comportamiento de la cantidad $A(t)$ a lo largo del tiempo. El código MATLAB correspondiente podría considerarse de la siguiente manera:

```
% Ecuación diferencial y parámetros
function dA = simpmezclas(t, A)
% Flujo volumétrico
qe = 2.0; % flujo volumétrico de entrada
qs = 1.5; % flujo volumétrico de salida
% Volumen inicial
v0 = 100; % volumen inicial
% Densidades
pe = 1.0; % densidad de entrada
ps = A / (v0 + (qe - qs) * t); % densidad de salida
% Flujos másicos
me = pe * qe; % flujo másico de entrada
ms = ps * qs; % flujo másico de salida
% Razón de cambio de la mezcla
dA = me - ms;
end
```

```
% Modelo para simpmezclas(t, A)
close all; format compact;
% Rango de tiempo
tspan = 0:1:10; % rango de tiempo
% Condición inicial
A0 = 0; % cantidad inicial del componente
% Solución numérica con ODE45
[t, A] = ode45(@simpmezclas, tspan, A0);
% Tabla de resultados
modelo = table(t, A);
% Gráficas
figure; plot(t, A, '-o'); title('Modelo de balance de mezcla');
xlabel('Tiempo'); ylabel('Cantidad del componente'); hold on;
% Solución exacta
f_exacta = (t + 200).^3 / 40000 - t - 200; plot(t, f_exacta, '-r');
legend('Solución numérica', 'Solución analítica'); hold off;
% Cambio neto: derivada exacta de F
df_exacta = (3 * (t + 200).^2) / 40000 - 1;
% Gráfica de la rapidez de cambio
figure; plot(t, df_exacta, '-b'); title('Gráfica de dF/dt');
xlabel('Tiempo'); ylabel('Rapidez neta');
% Cálculo de errores
ea = abs(f_exacta - A); % error absoluto
er = abs(ea / A * 100); % error relativo
% Tabla de solución y errores
solucion = table(t, A, f_exacta, ea, er, df_exacta, 'VariableNames', {'Tiempo', 'Sol. Numerica', 'Sol. Exacta', 'E. Absoluto', 'E. Relativo', 'Cambio Neto'});
```

Esta simulación se muestra cómo la cantidad del componente en el sistema evoluciona hasta alcanzar un estado estacionario. En este caso, la cantidad depende de la diferencia en los flujos volumétricos de entrada y salida, y como varía la densidad en función del tiempo.

Resultados

El análisis muestra que, aunque la solución numérica tiende a acercarse a la solución exacta con el tiempo, la diferencia entre ambas se acrecienta progresivamente. Tanto el error absoluto como el error relativo crecen, lo que sugiere que el método numérico puede estar acumulando errores a medida que avanza el tiempo.

	Tiempo	Sol. Numerica	Sol. Exacta	E. Absoluto	E. Relativo	Cambio Neto
1	0	0	0	0	NaN	2
2	1	1.9851	2.0150	0.0299	1.5062	2.0301
3	2	3.9410	4.0602	0.1192	3.0250	2.0603
4	3	5.8683	6.1357	0.2674	4.5562	2.0907
5	4	7.7678	8.2416	0.4738	6.1000	2.1212
6	5	9.6401	10.3781	0.7381	7.6562	2.1519
7	6	11.4858	12.5454	1.0596	9.2250	2.1827
8	7	13.3057	14.7436	1.4378	10.8062	2.2137
9	8	15.1004	16.9728	1.8724	12.3999	2.2448
10	9	16.8703	19.2332	2.3629	14.0062	2.2761
11	10	18.6162	21.5250	2.9088	15.6249	2.3075

Figura 1: Solución Numérica y Solución Analítica

A pesar de que el cambio neto es constante, lo que significa que el modelo está capturando el flujo volumétrico correctamente, la discrepancia paulatina en los resultados de la Figura 1 señala la necesidad de ajustar el método numérico a fin de mejorar la precisión. El modelo numérico parece tener un desempeño (admisible, razonable o conveniente) al principio, pero los errores aumentan con el tiempo. Esto podría sugerir que el método puede requerir ajustes para mejorar su precisión a lo largo del tiempo.

En el contexto de la industria de bebidas gaseosas, al comparar el análisis de los resultados numéricos con las soluciones exactas, se observa que, a pesar de que la solución numérica se aproxima a la solución exacta con el tiempo, la diferencia entre ambas aumenta progresivamente. Este incremento en la discrepancia puede estar relacionado con la acumulación de errores en el método numérico. El error absoluto y el error relativo aumentan con el tiempo, indicando que el método podría no capturar con precisión las dinámicas del proceso de mezcla de ingredientes, lo cual es crítico para mantener la calidad y consistencia.

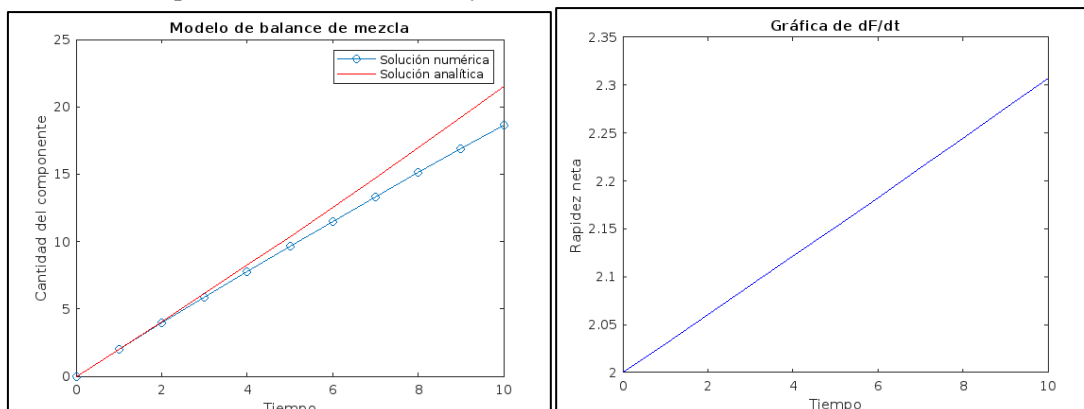


Figura 4: Modelo de balance de mezcla y razón de cambio

El cambio neto constante en los resultados sugiere que el modelo está representando adecuadamente el flujo volumétrico constante en el sistema de mezcla. No obstante, las diferencias crecientes entre las soluciones numérica y exacta indican que el modelo podría estar introduciendo errores acumulativos que afectan la precisión de la predicción.

Para la industria de bebidas gaseosas, donde la mezcla precisa de ingredientes es esencial para garantizar la homogeneidad y calidad del producto final, es crucial que el modelo numérico sea lo más preciso posible. La creciente discrepancia sugiere que deben considerarse ajustes en el método numérico para mejorar su precisión y capacidad de ajuste a las condiciones reales del

proceso (Myers, Montgomery, y Anderson-Cook, 2016). Se recomienda revisar y, posiblemente, refinar el método de resolución numérica, así como realizar validaciones adicionales con datos experimentales a fin de asegurar que el modelo pueda predecir con mayor exactitud el comportamiento del proceso de mezcla en la industria de bebidas gaseosas. Esto permitirá optimizar la calidad del producto final y mejorar la eficiencia del proceso de producción.

Discusión

El análisis de los resultados obtenidos en la modelación del proceso de mezcla en la industria de bebidas gaseosas arroja varios puntos interesantes que vale la pena discutir. Aunque el uso de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden parece ser una herramienta útil para representar el comportamiento de los ingredientes en el proceso de mezcla, la creciente discrepancia observada entre las soluciones numéricas y exactas deja en evidencia algunas limitaciones importantes, especialmente cuando se utiliza un método numérico.

Uno de los primeros factores a tener en cuenta es la acumulación de errores que se produce en los métodos numéricos. Tal como señala Zhitnikov (2016), estos métodos pueden introducir pequeños errores en cada paso de la simulación, que eventualmente se acumulan a lo largo del tiempo, especialmente en sistemas donde los cambios son graduales pero constantes. En este caso, aunque el modelo captura adecuadamente la tendencia general del proceso de mezcla, los errores numéricos se van sumando hasta generar diferencias notables entre los resultados exactos y numéricos. Esto podría convertirse en un problema crítico en la producción real, ya que incluso pequeñas desviaciones pueden afectar la consistencia del producto final.

Por otro lado, el análisis también pone de manifiesto lo sensible que es el proceso de mezcla a pequeñas variaciones en los flujos de entrada y salida. Incluso ajustes menores en estos flujos pueden aumentar la diferencia entre los resultados analíticos y numéricos, lo cual sugiere que se requiere un control riguroso sobre los parámetros operativos para asegurar la calidad del producto. Aunque herramientas como MATLAB son extremadamente útiles para hacer simulaciones rápidas y eficientes, siempre es necesario tener datos reales para ajustar los modelos y asegurarse de que reflejan con precisión el comportamiento del sistema. Esto es algo que ya se ha mencionado en trabajos previos como el de Kiusalaas (2013), que subraya la importancia de comparar las simulaciones con la realidad para evitar que los modelos se desvíen de los resultados esperados.

En términos prácticos, la implementación de estos modelos matemáticos en un entorno industrial presenta ciertos retos adicionales. Por ejemplo, la variabilidad en las propiedades físicas de los ingredientes o la presencia de múltiples fases en el proceso de mezcla puede introducir una complejidad adicional que dificulte la precisión del modelo. Mavani et al (2022) discuten cómo estos factores, si no se tienen en cuenta, pueden llevar a una mayor no linealidad en el sistema, haciendo que los métodos numéricos sean aún más propensos a errores.

Aunque el uso de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden ha demostrado ser una herramienta útil para modelar los procesos de mezcla en la industria de bebidas gaseosas, los resultados muestran que todavía hay margen para mejorar. Es fundamental seguir trabajando en métodos numéricos más robustos y asegurarse de validar constantemente estos modelos con datos experimentales. Esto no solo mejorará la precisión de las predicciones, sino que también permitirá optimizar los procesos de producción, reduciendo costos y mejorando la calidad del producto, tal como lo señalan Chapra y Canale (2014).

Conclusiones

El estudio realizado demuestra que el uso de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden es una estrategia valiosa para mejorar los procesos de mezcla en la industria de bebidas gaseosas. Al aplicar estos modelos, no solo se logra una mejor comprensión de las dinámicas involucradas, sino que también se abre la posibilidad de optimizar la producción, garantizando la consistencia y calidad del producto final.

Sin embargo, los resultados revelan la importancia de afinar los métodos numéricos empleados ya que, incluso, pequeños errores pueden tener un impacto significativo en las predicciones, lo cual subraya la necesidad de un enfoque riguroso y adaptable en el modelado matemático, respaldado por datos experimentales, para asegurar que las mejoras propuestas sean efectivas y se traduzcan en beneficios reales en la práctica industrial. En definitiva, la integración de modelos matemáticos en la industria alimentaria no solo es viable sino necesaria para afrontar los retos de un mercado cada vez más competitivo y exigente.

Bibliografía

1. Chapra , S., & Canale, R. (2014). Numerical Methods for Engineers (Septima ed.). McGraw Hill. <https://doi.org/978-0073397924>
2. Granato, D., & De Araújo Calado, V. (2010). Experimental design and application of response surface methodology for process mode- ling and optimization: A review. Food Research International, 55, 441-450. <https://doi.org/10.1016/j.foodres.2010.12.008>
3. Kiusalaas, J. (2013). Numerical Methods in Engineering with Python 3 (Tercera ed.). Cambridge University Press. <https://doi.org/https://doi.org/10.1017/CBO9781139523899>
4. MathWorks. (2024). MATLAB Online. The MathWorks, Inc.: <https://www.mathworks.com/products/matlab-online/matlab-online-versions.html>
5. Mavani, N., Ali, J., Othman, S., Hussain, M., Hashim, H., & Rahman, N. (2022). Application of Artificial Intelligence in Food Industry—a Guideline. Food Engineering Reviews, 14, 134–175. <https://doi.org/10.1007/s12393-021-09290-z>
6. Moore, H. (2017). MATLAB for Engineers. (Quinta ed.). Pearson.
7. Myers, R. H., Montgomery, D. C., & Anderson-Cook, C. M. (2016) (2016). Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments (Cuarta ed.). John Wiley Sons. <https://doi.org/978-1-118-91601-8>
8. Oltra, M., Hargaden, V., Coughlan, P., & García, B. (2020). Innovation in the Agri-Food sector: Exploiting opportunities for Industry 4.0. Creativity and Innovation Management, 30(11), 198-210. <https://doi.org/10.1111/caim.12418>
9. Smith, H. (2011). An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences. Springer New York, NY. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7646-8>
10. Yang, X. S. (2024). .Engineering Simulation and Its Applications: Algorithms and Numerical Methods. Elsevier. <https://n9.cl/tcvbq>
11. Zhitnikov, V., Sherykhalina, N., & Muksimova, R. (2016). Peculiarities of error accumulation in solving problems for simple equations of mathematical physics by finite difference methods. Numerical Analysis and Applications, 9, 107-117. <https://doi.org/10.1134/S1995423916020026>
12. Zill, D., & Wright, W. (2017). Differential Equations with Boundary-Value Problems (Septima ed.). Cengage Learning. <https://acortar.link/86qN2y>